UNIDAD I
LA INTEGRAL INDEFINIDA

INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial proporciona una regla para obtener la derivada de una función sencilla, con esta regla se obtienen las fórmulas para derivar todo tipo de funciones, sin embargo en cálculo integral no hay regla general que pueda usarse.

En la práctica cada problema necesita un trato especial. La integración es un proceso esencialmente de ensayos, por ellos se estudiarán varias fórmulas y métodos para facilitar su estudio.

Los científicos que usan integrales, con frecuencia usan tablas de integrales, muchas de estas fórmulas se han obtenido con los métodos de integración que estudiaremos.

Como ya se vio en el curso de cálculo diferencial, una línea, un área, un volumen o cualquier otro cuerpo dimensional representado por una ecuación, lo dividimos infinitesimalmente, es decir, se hacen las divisiones cada vez más pequeñas (al momento de derivar), en cambio en el cálculo integral se suman todas esas pequeñas divisiones hasta obtener el resultado que se desea; de una distancia, un área, un volumen o cualquier otro parámetro.

LA DIFERENCIAL

Generalidades. Incremento De Una Función

Recuerda que uno de los objetivos fundamentales del cálculo infinitesimal es estudiar cómo varía una función cuando el valor de su variable independiente cambia.

Si $\boldsymbol{x}$ es la variable independiente de la función $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ y su valor cambia desde x1 hasta x_2, el aumento o disminución que experimenta dicha variable se llama incremento de $\boldsymbol{x}$ y se denota por $\boldsymbol{\Delta x}$. Así tenemos:

$$\boldsymbol{\Delta x = x_2 - x_1}$$

Cuando la variable independiente $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ experimenta un incremento $\boldsymbol{\Delta x}$, generalmente la función $\boldsymbol{y}$ también experimenta un aumento o disminución de su valor, el cual se denomina incremento de la función y se denota por $\boldsymbol{\Delta y}$, es decir:

$$\boldsymbol{\Delta y = f(x_2) - f(x_1)}$$

Como $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$, por lo tanto, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_1}$ .Así tenemos que:

$$\boldsymbol{\Delta y = f(x_2 + \Delta x) - f(x_1)}$$

La palabra incremento se emplea para referirnos a la variación: aumento (+) como a una disminución (-).

Ejemplo.- Dada la función $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x^2 - 5x + 3}$, determina:

a) El incremento de $\boldsymbol{x}$ en el intervalo desde $\boldsymbol{x = -2}$ hasta $\boldsymbol{x = 2}$.

Solución:

$\Delta x = x_2 - x_1$, donde $x_2 = 2$ y $x_1 = -2$.

Por lo tanto: $\Delta x = 2 - (-2)$; $\Delta x = 2 + 2$; $\Delta x = 4$

b) El incremento de la función $\boldsymbol{y}$ en el intervalo desde $x = -2$ hasta $\boldsymbol{x = 2}$.

Solución:

$\boldsymbol{\Delta y} = f(\boldsymbol{x_2}) - f(\boldsymbol{x_1})$, donde $f(\boldsymbol{x_2}) = f(\boldsymbol{2})$ y $f(\boldsymbol{x_1}) = f(\boldsymbol{-2})$

Determinemos a continuación $f(\boldsymbol{2})$ y $f(\boldsymbol{-2})$, y por último el incremento de la función ($\boldsymbol{\Delta y}$).

$$f(2) = 2(2)2 - 5(2) + 3 = 8 - 10 + 3\, f(2) = 1$$

$$f(-2) = 2(-2)2 - 5(-2) + 3 = 2(4) + 10 + 3\, f(-2) = 21$$

De acuerdo con los valores obtenidos de $f(\boldsymbol{2})$ y de $f(\boldsymbol{-2})$ resulta:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta y = f(2) - f(-2)\ ;\ \Delta y = 1 - 21$$

$$\Delta y = -20$$

c) El incremento de la función $\boldsymbol{y}$ desde el intervalo $\boldsymbol{x}$ hasta $\boldsymbol{x + \Delta x}$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{x_2 = x + \Delta x}$ y $\boldsymbol{x_1 = x}$, entonces

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = [2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 3] - (2x^2 - 5x + 3)$$

Si hacemos $h = \Delta x$, tenemos:

$$\Delta y = [2(x + h)^2 - 5(x + h) + 3] - (2x^2 - 5x + 3)$$

$$\Delta y = [2(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 3] - 2x^2 + 5x - 3$$

$$\Delta y = [2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3] - 2x^2 + 5x - 3$$

$$\Delta y = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5x - 5h + 3 - 2x^2 + 5x - 3$$

$\Delta y = 4xh + 2h^2 - 5h,$ *o sea:* $\Delta y = 4x\,\Delta x + 2\Delta x^2 - 5\Delta x$

d) El incremento de la función si $\boldsymbol{x = 4}$ y $\boldsymbol{\Delta x = 2}$. Solución:

De acuerdo con la expresión obtenida en el inciso anterior, tenemos:

$$\Delta y = 4x\,\Delta x + 2\Delta x^2 - 5\Delta x$$

Luego:

$$\Delta y = 4(4)(2) + 2(2)^2 - 5(2)\,;\ \Delta y = 32 + 8 - 10\ \Delta y = 30$$

Diferenciales

Consideremos que la función $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ es derivable en el intervalo $\boldsymbol{a \le x \le b}$. En un punto $\boldsymbol{x}$ de dicho intervalo, la derivada de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$ se define por la expresión:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{dx}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Hasta ahora hemos utilizado la expresión $\frac{dy}{dx}$ como un símbolo para denotar la derivada de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$. Ahora definiremos el concepto de *diferencial* de manera que $\boldsymbol{dx}$ y $\boldsymbol{dy}$ tengan significados por separado. Esto nos permitirá considerar la expresión $\frac{dy}{dx}$ como la razón de $\boldsymbol{dy}$ y $\boldsymbol{dx}$, donde $\boldsymbol{dx}$ es la diferencial de la variable independiente $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{dy}$ es del diferencial de la variable dependiente $\boldsymbol{y}$.

Definición del diferencial $\boldsymbol{dx}$

Si $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ es una función derivable en $\boldsymbol{x}$, la diferencial de la variable independiente coincide con el incremento de x; o sea:

$$\boldsymbol{dx = \Delta x}$$

Definición del diferencial $\boldsymbol{dy}$

Si $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ es una función derivable en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{dx}$ es el diferencial de $\boldsymbol{x}$, el diferencial $\boldsymbol{dy}$ que corresponde a la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ se define como:

$$\boldsymbol{dy} = f'(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$$

Se llama *diferencial* de una función al producto de la derivada por la diferencial de la variable independiente.

De acuerdo con la expresión anterior, el valor del diferencial $\boldsymbol{dy}$ depende del valor de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{dx}$; o sea que $\boldsymbol{dx}$ es otra variable independiente de $\boldsymbol{dy}$.

Si en la expresión $\boldsymbol{dy} = f'(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$, $\boldsymbol{dx}$ es diferente de cero y dividimos ambos miembros de la igualdad por $\boldsymbol{dx}$ obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boldsymbol{f'(x)dx}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{f'(x)}$$

Ejemplos:

1.- dadas las siguientes funciones derivar y determinar las diferenciales de $\boldsymbol{y}$ correspondientes.

Función	***Derivada***	***Diferencial***
$y = x^3$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	$dy = 3x^2dx$
$y = 4x^2$	$\frac{dy}{dx} = 8x$	$dy = 8xdx$
$y = 3x$	$\frac{dy}{dx} = 3$	$dy = 3dx$

Notación. La diferencial de una función se representa por medio de la letra $\boldsymbol{d}$ colocada delante de la función. Así, si la función es $y = x^2$, la diferencial se expresa como:

$dy = 2x\,dx$; y se lee: "***diferencial de y***"

2.- Determina la diferencial de la función $y = sen\,4x$

Solución:

$\frac{dy}{dx} = 4cos4x$

$dy = 4cos4xdx$

3.- Determina la diferencial de la función $\boldsymbol{f}(x) = \sqrt{5x-4}$

Solución:

Haciendo $y = f(x)$ y cambiando a notación de potencia

$y = (5x-4)^{1/2}$	Derivado, aplicando (10) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(5x-4)^{\frac{1}{2}}(5)$	Bajando el binomio al denominador para que la potencia sea positiva y cambiando la natación a raíz:
$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$	Despejando dx
$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}dx$	

4.- Determina el incremento y la diferencial de la función $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x^2 - x}$para $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{dx = 0.01}$.

Solución: se requiere calcular $\boldsymbol{\Delta y}\ y\ \boldsymbol{dy}$

Primero calculamos el incremento de la función.

De la expresión $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ *sustituyendo valores*

$$\Delta y = f(1 + 0.01) - f(1)$$

$\Delta y = f(1.01) - f(1)$ *; sustituyendo en* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x^2 - x}$

$$\Delta y = [2(1.01)^2 - 1.01] - [2(1)^2 - 1]$$

$$\Delta y = 1.0302 - 1$$

$$\boldsymbol{\Delta y = 0.0302}$$

De la función $f(x) = 2x^2 - x$ *obtenemos* $\mathbf{dy}$ *derivando:*

$\frac{dy}{dx} = 4x - 1$ *despejando* $\mathbf{dx}$ *al segundo miembro:*

$$dy = (4x - 1)dx$$

Sustituyendo $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{dx = 0.01}$, *obtenemos:*

$$dy = [4(1) - 1]0.01 = 0.04 - 0.1$$

$$\boldsymbol{dy = 0.03}$$

Obsérvese que el valor del incremento de la función $\boldsymbol{\Delta y}$ *es aproximadamente el de la diferencial de la función* $\mathbf{dy}$.

Ejercicios (1).- Resuelve lo que se te pide:

1) Define los conceptos: a) ***incremento,*** b) ***diferencial.***

2) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = x + 3x}$, determina el incremento de la función cuando $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{\Delta x = 0.01}$.

3) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 5}$, determina:

a) el incremento de la función cuando $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{\Delta x = 0.01}$

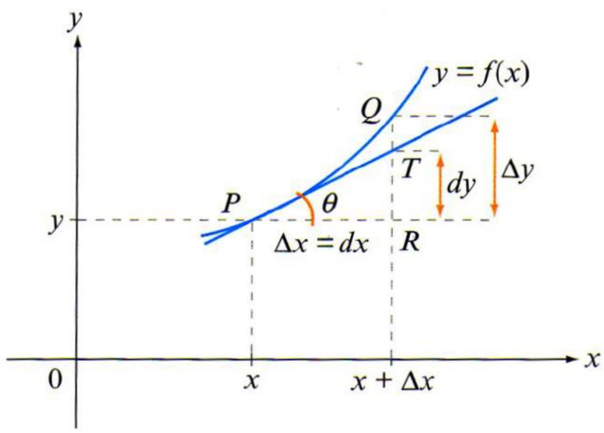
b) la diferencial de la función cuando $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{\Delta x = 0.01}$.

4) Aplicando la definición de diferencial, calcula las diferenciales de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 3}$ b) $\boldsymbol{y = sen\, 2x}$ c) $\boldsymbol{y = 2}$ d) $\boldsymbol{y = x}$

Resolución De Problemas Por Aproximación

La siguiente figura corresponde a la función diferenciable $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$.

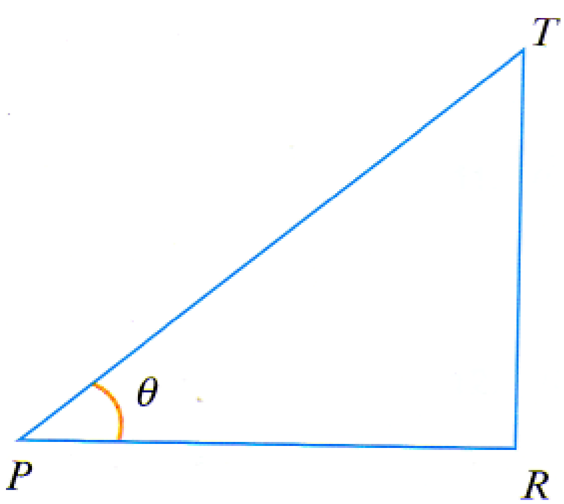


Tomamos en la curva un punto arbitrario $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, trazamos una tangente a la curva en ese punto y definimos como $\boldsymbol{\theta}$ al ángulo que se forma por la tangente y la dirección positiva del eje $\boldsymbol{x}$.

Damos a la variable independiente un incremento Δx. Así, la función experimentará el incremento.

$$\boldsymbol{\Delta y} = \boldsymbol{RQ}$$

De acuerdo con la figura, las coordenadas del punto $\boldsymbol{Q}$ son $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\Delta y})$. En el triángulo $\boldsymbol{PRT}$ encontramos:



$\tan 0 = \frac{RT}{RP}$ $\qquad$ $RT = RP\ tan0$

Como $f'(x) = \tan\theta$ y $RP = \Delta x$, tenemos que $RT = f'(x)\,\Delta x$. La diferencial de la función es igual a la longitud del segmento de recta RT, o sea:

$$dy = RT$$

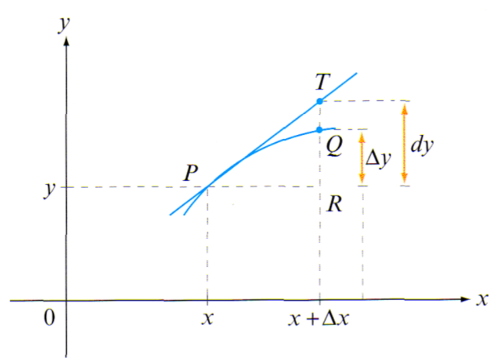
La igualdad anterior significa que la diferencial de la función $f(x)$, correspondiente a los valores dados de x y de Δx, es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x.

En la figura también podemos observar que $QT = \Delta y - dy$. Esto significa que la diferencial dy no es lo mismo que el incremento de la función; esto es, $dy \neq \Delta y$. Sin embargo, si $\Delta x \to 0$, entonces $dy \approx \Delta y$.

Si Δx se aproxima a cero, tenemos que el valor del incremento de la función es aproximadamente igual al valor de la diferencial dy.

Esto nos permite utilizar en los cálculos ordinarios la igualdad $\Delta y = dy$ porque generalmente es más sencillo calcular $f'(x)\,\Delta x$ que $f'(x + \Delta x) - f(x)$.

Es importante aclarar que no siempre Δy es mayor que dy. Analiza la siguiente figura y verás que aquí la gráfica de la función es cóncava hacia abajo.



$$dy > \Delta x$$

Ejemplos:

1. Determina el valor aproximado del incremento de la función $f(x) = x2 + 4x$ para $x = 2$ y $\Delta x = 0.001$.

Solución:

Considerando que $\Delta y \approx dy$

Derivando $f(x) = x^2 + 4x$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 4$ *despejando* dx

$\frac{dy}{dx} = (2x + 4)dx$ *sustituyendo* $x = 2$ $y\ dx = \Delta x = 0.001$

$$dy = [2(2)+4]\,(0.001) = 8\,(0.001)$$

$dy = 0.008$ como $\Delta y \approx dy$

El incremento de la función es aproximadamente 0.008

2.- Supongamos que ante una determinada situación no contamos con calculadora y requerimos de una buena aproximación para determinar:

a) $\sqrt{4.6}$

b) $\sqrt{8.2}$

Solución:

a) Consideremos la gráfica de $y = \sqrt{x}$ dibujada en la figura siguiente. Si x cambia de 4 (que tiene raíz exacta) a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4=2}$ a (aproximadamente) $\sqrt{4+dy}$. Ahora bien obteniendo la diferencial de $\boldsymbol{dy}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

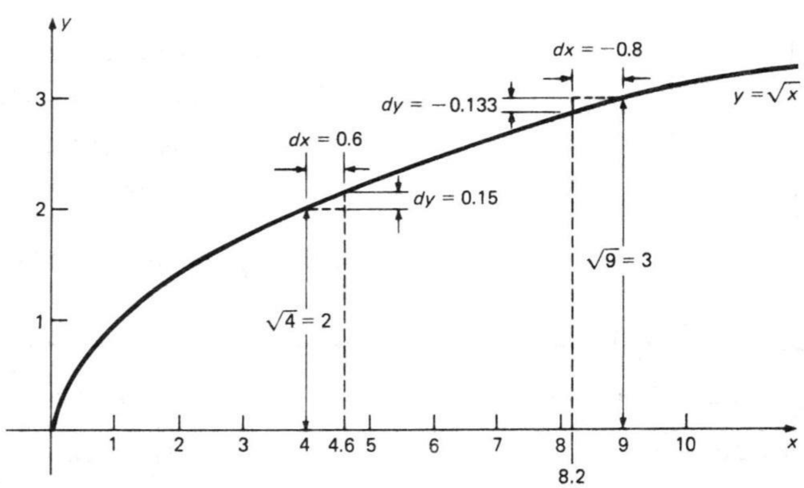
$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Lo cual para $x = 4$ y $dx = 0.6$ toma el valor.

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 1.15$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15$$



b) En forma semejante $y = \sqrt{x}$, para el radicando 8.2 hacemos para $\boldsymbol{x = 9}$ (que tiene raíz exacta) y $\boldsymbol{dx = -0.8}$

$$\boldsymbol{dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8) = \frac{-0.8}{6} = -0.133$$

Y por lo tanto:

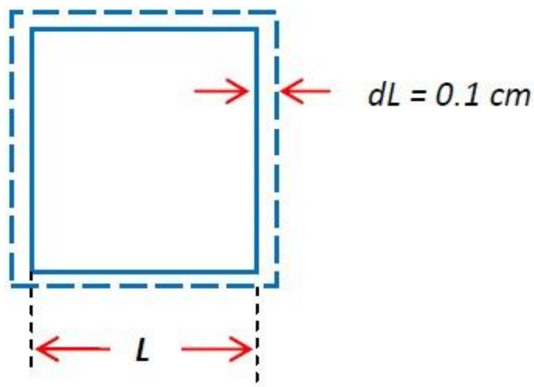
$$\sqrt{8.2} \approx \sqrt{9} + dy = 3 - 0.133 \qquad\qquad \sqrt{8.2} \approx 2.867$$

Nótese que tanto $\boldsymbol{dx}$ como $\boldsymbol{dy}$ son negativas en este caso.

Los valores aproximados 2.15 y 2.867 se pueden comparar con los valores verdaderos 2.1448 y 2.8636.

4. El lado de un cuadrado mide 20 cm. Calcula el incremento aproximado del área si su lado se incrementa 0.1 cm.

Solución:



$$\Delta A \approx dA$$

El incremento del Área es aproximadamente

El diferencial del área.

Dónde: el área es una función del lado

$A = f(L)$

$A = L2$ *(formula del cuadrado)*

Derivando respecto a $\boldsymbol{L}$

$\frac{dA}{dL} = 2L$ *despejando* dL

$dA = 2L\,(dL)$ *sustituyendo los valores de* $\boldsymbol{L}$ *y* $\boldsymbol{dL}$

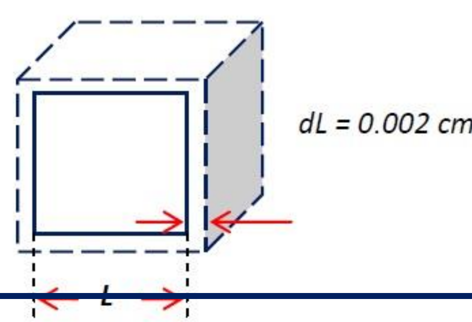
$dA = 2(20)(0.1)$

$dA = 4$ *como* $\Delta A \approx dA$

El incremento aproximado del área del cuadrado es de $4cm^2$

5. Calcula el incremento aproximado del volumen de un cubo cuyos lados miden 3 cm y aumentan 0.002 cm cada uno.

Solución:



$$\Delta V \approx dV$$

El incremento del volumen es aproximadamente

el diferencial del volumen

Dónde: el volumen es una función del lado

$V = f(L)$

$V = L^3$ *derivando*

$\frac{dV}{dL} = 3\,L^2$ *despejando* dL

$dV = 3\,L^2\,dL$

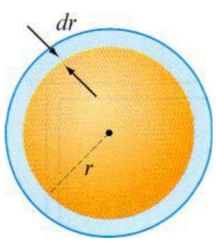
Sustituyendo valores $L = 3\,cm$ y $dL = 0.002$ *obtenemos:*

$$dV = 3(3\,cm)^2\,(0.002\,cm) = 27\,cm^2\,(0.002\,cm)$$

$dV = 0.054\,cm^3$ *como* $\Delta V \approx dV$

El incremento aproximado de volumen es de $0.054\,cm^3$

6. El volumen de un cascarón esférico se considera como un incremento del volumen de una esfera. Analiza la siguiente figura.



Calcula el volumen aproximado del cascarón esférico que tiene un radio interior de 8 cm y cuyo espesor es de 0.12 cm.

Solución:

$\Delta V \approx dV$ *el incremento de volumen es aproximadamente el diferencial de volumen*

Dónde:

$V = f(r)$ *El volumen es una función del radio*

$V = \frac{4\pi^3}{3}$ *Formula del volumen*

Derivando respecto al radio

$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\,\pi r^2 dr$ *Reduciendo* $\frac{3}{3} = 1$ *y despejando* dr

$dV = 4\pi r^2 dr$

Sustituyendo valores $r = 8\,cm$ *y* $dr = 0.12\,cm$*, obtenemos:*

$dV = 4\pi(8cm)^2(0.12cm) = 256\pi cm^2(0.12cm)$

$dV = 30.72\pi\,cm^3$ *Multiplicando por* π:

$dV = 96.51\ cm^3$ $\quad Como \quad$ $\Delta V \approx dV$

El incremento de volumen es aproximadamente 96.51 cm^3

Ejercicios (2).- Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Mediante diferenciales calcula el valor aproximado de $\sqrt{25.2}$

2) Mediante diferenciales calcula el valor aproximado de $\sqrt[3]{64.2}$

3) Si el lado de un cuadrado mide 15 cm, calcula el incremento aproximado del área si su lado se incrementa 0.02 cm.

4) Si el lado de un cubo mide 4 cm, calcula el incremento aproximado del volumen si su lado aumenta 0.02 cm.

5) Calcula el volumen de un cascaron esférico si su radio interior mide 6 cm y su espesor es de 0.02 cm.

Anti derivada: La Integral Indefinida Como Operación Inversa De La Diferenciación

Por lo que se ha visto referente al cálculo diferencial, se desprende que por él se investiga el límite de una razón (cociente) de dos magnitudes sumamente pequeñas, o sea que se determina la pendiente de una curva dada por su función.

El cálculo integral tiene como fin hallar la función original cuya derivada se conoce, desde este punto de vista la integral es la operación inversa a la derivada.

Supongamos que se nos pide encontrar una función $\boldsymbol{F}$ cuya derivada es $f(x) = 3x^2$. De lo que sabemos sobre derivadas, podemos decir que:

$$\boldsymbol{F}(x) = x^3 \quad \text{debido a que} \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

La función $\boldsymbol{F}$ es una anti derivada de f; nótese que se está indicando una antiderivada, no la antiderivada, esto porque funciones como:

$$\boldsymbol{F1}(x) = x^3, \boldsymbol{F2}(x) = x^3 - 5, \boldsymbol{F3}(x) = x^2 + 2, \boldsymbol{F4}(x) = x^3 + \sqrt{\pi}$$

Son todas anti derivadas de $\boldsymbol{f}(x) = 3x^2$. De hecho para cualquier constante $\boldsymbol{C}$, la función dada por $\mathbf{F}(x) = x^3 + C$ es una anti derivada de f. Para los ejemplos anteriores la constante $\boldsymbol{C}$ tomaría los valores: $0, -5, 2\ y \sqrt{\pi}$.

Consideremos los ejemplos siguientes:

Función Primitiva	*Derivada*	*Diferencial*	*Anti derivada o Integral Indefinida*
F(x)	f (x)	f (x) dx	$\int$f(x) dx
x^3	$3x^2$	$3x^2\ dx$	x^3+C
cos(5x)	*+5sen(5x)*	*-5sen(5x) dx*	*Cos 5x +C*
e^{3x}	$3e^{3x}$	$3e^{3x}dx$	$e^{3x}+C$
$Ln\ (x^2-1)$	$\frac{2x}{x^2+1}$	$\frac{2x}{x^2+1}dx$	$Ln\ (x^2-1)+C$

En estos ejemplos tenemos en la primer columna a la función primitiva, en la segunda columna la derivada, en la tercer columna su diferencial y en la cuarta a la integral, donde volvemos a obtener la primitiva más la constante de integración C.

De lo anteriormente expuesto podemos concluir lo siguiente:

1. La derivada y la integral son operaciones inversas,

2. El problema del cálculo integral consiste en que: “dada la diferencial de una expresión, hallar la función”.

3. La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente. Una ecuación diferencial en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ es una igualdad que comprende a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y derivadas de $\boldsymbol{y}$, cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma:

$\frac{dy}{dx} = f(X)$ Es útil escribirla en su forma diferencial equivalente, como:

$$dy = f(x)\,dx$$

4. *Notación Para Las Antiderivadas*: La operación de hallar todas las soluciones de esta ecuación se llama antiderivación o **integración indefinida** y se indica con el signo de integral ideado por Leibniz: $\int$ que como ya se menciono es una letra **s** deformada y **expresa suma**. La solución general se denota por:

$$y = \int \underbrace{f(x)}_{\textit{Integrado}}\,dx = F(x) \underbrace{+\ C}_{\textit{Constante de integración}}$$

*Se lee como “**la integral de f con respecto a x**”*

Prueba de la integración indefinida. Para comprobar el resultado de una integral indefinida, se halla la derivada del resultado, esta derivada debe ser igual al integrando.

Reglas para integrar las formas elementales de la integral indefinida.

1) Para facilitar el trabajo en el principio del aprendizaje conviene echar mano del formulario de integrales inmediatas. Por separado a estos apuntes viene un ***formulario de matemáticas***, del cual es necesario tener una copia para consulta.

2) Para resolver una integral se compara la expresión diferencial dada con las fórmulas de integrales inmediatas; si se encuentra la formula inmediata, se aplica y se calcula la integral; si no existe una formula inmediata, se aplican diversos métodos algebraicos hasta reducirla a una de las formas registradas.

Propiedades de la integral indefinida:

Estas dos propiedades nos sirven para reducir las expresiones diferenciales a integrales inmediatas.

1) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de los integrales

$$\int (du + dv + dw) \quad = \int du + \int dv + \int dw$$

2) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función

$$\int a\,dv \quad = a \int dv \quad en\ donde\ \ a = constante$$

Formulario:

1) $\int (du + dv + dw) \quad = \int du + \int dv + \int dw$

2) $\int a\,dv \quad = a \int dv \quad en\ donde\ \ a = constante$

3) $\int dx \quad = x + c$

4) $\int x^n\,dx \quad = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad en\ donde\ n \neq -1$

5) $\int v^n\,dv \quad = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c \quad en\ donde\ n \neq -1$

6) $\int \frac{dv}{v} \quad = ln\ |v| + c$

7) $\int a^v\,dv \quad = \frac{a^v}{\ln a} + c$

8) $\int e^v\,dv \quad = \ e^v + c$

9) $\int senv\,dv \quad = -\cos v + c$

10) $\int \cos v\ dv \quad = sen\ v + c$

11) $\int \sec^2 v\ dv \quad = tan\ v + c$

12) $\int \csc^2 v\ dv \quad = -cot\ v + c$

13) $\int \sec v \tan v\ dv \quad = sec\ v + c$

14) $\int \csc v \cot v\ dv \quad = -csc\ v + c$

15) $\int \tan v\ dv \quad = -ln\,|cos\ v| + c$

$\quad = ln\,|\sec v| + c$

16) $\int \cot v\ dv \quad = ln\,|sen\ v| + c$

17) $\int \sec v\ dv = ln\,|sec\ v + \tan v\,| + c$

18) $\int \csc v\ dv = ln\,|csc\ v - \cot v\,| + c$

Ejemplo.- sea el caso de obtener la antiderivada de $\mathbf{3x}$ ***Formulas aplicadas***

Solución: $\int \mathbf{3x}\ dx$

Aplicamos la fórmula 2, regla de la constante (2) $\int a\,dv \quad = a \int dv$

$$\int 3x\,dx \ = \ 3 \int \ x\,dx$$

Aplicamos la fórmula 4, regla de la potencia, con $n \neq -1$ (4) $\int x^n\,dx \quad = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$= \mathbf{3}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{1+1}}}{\mathbf{1+1}} + \boldsymbol{C} = \ \mathbf{3}\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

Simplificando:

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

La comprobación de la integral de una función diferencial es mediante derivación; en el ejemplo del inciso b, derivando el resultado, tenemos:

$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{2/3}+C\right]=\frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{1/2}=\sqrt{x}$ Igual que el integrando del ejemplo b

Ejemplos.- Integra y comprueba por derivación los resultados obtenidos.

1. $\int\ x^2\ dx=\frac{x^3}{3}+C$ Aplicando formula 4; con $u\ =\ x$ y $n\ =\ 2$ (4) $\int x^n\ dx\ \ =\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

Derivando para comprobar: Sea $f(x)=\frac{x^3}{3}+C$

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{3}[3x^2]=x^2}$$

2. $\boldsymbol{\int\frac{1}{x^3}\ dx=\ \int x^{-3}\ dx}$ Subiendo x^3 al numerador; ver leyes de los exponentes en formulario. Aplicando formula 4; $n\ =\ -3$

$$=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C \qquad (4)\int x^n\ dx\ \ =\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=-\frac{1}{2x^2}+C$$

Derivando para comprobar: Sea

$$\mathrm{f}(x)\ =-\frac{1}{2x^2}+C\ ; f'(x)=-\frac{1}{2}[-2x^{-2-1}]=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$$

3. $\boldsymbol{\int\sqrt[3]{x^2}\ dx=\int x^{2/3}\ dx}$ Cambiando la notación radical a potencia; ver Radicales en formulario. Aplicando formula 4; con $n\ =\ 2/3$.

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C$$

Para efectuar la suma de fracciones, considérese que $1=\frac{3}{3}$

Derivando para comprobar: $Sea\ f(x)=\frac{3}{5}x^{5/3}+C; f'(x)=\frac{3}{5}\left[\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}\right]=x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$

4. $\boldsymbol{\int(x^2+2x-\sqrt{x})dx}$

Aplicando las formulas 1 y 2 volvemos a escribir:

(1) $\int(du+dv+dw)\qquad=\int du+\int dv+\int dw \qquad (2)\ \int a\ dv\ =a\int dv$

$\int x^2+2\int x\,dx - \int x^{1/2}\,dx$

Integrando y reduciendo:

$$\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$

Derivando para comprobar:

$$Sea\ f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\right)$$

$$=\frac{1}{3}(3x^2)+2x-\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1}\right]=x^2+2x-\sqrt{x}$$

Práctica 1

1) $\int x^3dx=$	2) $\int \frac{dx}{x^2}=$
3) $\int \sqrt{x^2}dx=$	4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=$
5) $\int(2x^2+3x+5)dx=$	6) $\int 2\ sen\ x\ dx=$
7) $\int 3\cos x\ dx=$	8) $\int 3\sqrt[3]{x^2}dx=$

9) $\int e^x dx =$	10) $\int 2a^x =$
11) $\int \frac{4dx}{x} =$	12) $\int \frac{5dx}{2x} =$

Integrales inmediatas

Para resolver una integral inmediata, se compara la expresión diferencial dada con las fórmulas de integrales inmediatas; si se encuentra la formula inmediata, se aplica y se calcula la integral; si no existe una formula inmediata, se aplica algún otro de los diversos métodos hasta reducirla a una de las formas inmediatas.

Observa que el patrón general de integración es similar al de derivación:

Integral Original →	Vuelve a Escribir →	Integra →	Simplifica	Formulas Aplicadas
a) $\int \frac{1}{x^2} dx$	$\int x^{-2} dx$	$\frac{x^{-1}}{-1} + C$	$-\frac{1}{x} + C$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
b) $\int \sqrt{x}\, dx$	$\int x^{1/2} dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + C$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
c) $\int 2 senX dx$	$2\int sen\ x\ dx$	2(-cos x)+C	-2 cos x+C	$\int senudu = -cosu + C$

Ejemplos.- Resuelve las siguientes integrales. Formulas empleadas

1.- $\int x^6 dx =$

Aplicando la fórmula 4

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int x^6 dx - \frac{x^{6+1}}{6+1} + C - \frac{x^7}{7} + C$

2.- $\int \sqrt{x} dx$

La podemos escribir como potencia

$\int x^{\frac{1}{2}} dx$

Aplicando la fórmula 4

$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

3.- $\int \frac{dx}{x^3}$

La podemos escribir como

$\int x^{-3} dx$

Aplicando formula 4

$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

4.- $\int ax^5 dx$

Utilizando formula 2 tenemos

(2) ∫audx=a∫udx

$= a\int x^3 dx$

Utilizando formula 4

$=a\int x^3 dx = a\frac{x^{3+1}}{5+1} + C = \frac{ax^6}{6} + C$

(5) $\int v^n dv = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

5.- $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx$

Utilizando formulas 1 y 2 tenemos

$-2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$

(3) ∫dx = x + c

Simplificando

$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

6.- $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c^3\sqrt{x}\right) dx$

Utilizando las formulas 1 y 2 podemos escribir

$2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3c^3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$

(1) $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$

Aplicando la fórmula 4

$$= 2a\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3c^3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2ax^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3c^3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

Simplificando queda

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + 2c^3\sqrt{x^3} + C$$

7.- $\int \frac{x^2-4}{x^4}dx$

La podemos escribir como

$\int \frac{x^2}{x^4}dx - \int \frac{4}{x^4}dx$

Simplificando y utilizando fórmula 2

(2) ∫audx=a∫udx

$\int x^{-2}dx - 4\int x^{-4}dx$

Aplicando fórmula 4

(5) $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 4\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$$

Simplificando

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{4x^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3} + C$$

8.- $\int \frac{3}{x}dx$

Aplicando fórmula 2 y posteriormente la 5

(2) ∫audx=a∫udx

$\int \frac{3}{x}dx = 3\int\frac{dx}{x}$

(6) $\int \frac{dv}{v} = In|v| + C$

$= 3In\,|x| + C$

9.- $\int 3e^x dx$

Aplicando fórmula 2 y posteriormente 7

(8) $\int e^v dv = e^v + C$

$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx$

$= 3e^x + C$

10.- $\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx$ Aplicamos la identidad trigonométrica $\frac{sen\,x}{\cos x} = \tan x$ (Ver formulario)

$\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx = \int \tan x \quad dx$

Aplicando fórmula 14

(15) $\int tanv\; dv = In|\sec u| + C$

$= In|\sec x| + C$

Ejercicios (5).- Resuelve las siguientes integrales indefinidas

1.- $\int \frac{dx}{x^3}$

2.- $\int (6e^x + 2)dx$

3.- $\int 3a^x dx$

4.- $\int (4x^3 + 3x^2 + x)dx$

5.- $\int Cos\ x\ dx$

6.- $\int \frac{2x\ dx}{x^2+3}$

7.- $\int \sqrt{x^5} dx$

8.- $\int \frac{4x^2+2x+3}{x} dx$

9.- $\int Csc^2 x\ dx$

10.- $\int \frac{dx}{x^4}$

11.- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

12.- $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

13.- $\int (x-3)^2 dx\ dx$

14.- $\int 5\ sen\ x\ dx$

15.- $\int Sec\ x\ Tan\ x\ dx$

Integración Por Sustitución Algebraica O Cambio De Variable

Con frecuencia es necesario tomar a $\boldsymbol{u}$ como una nueva variable en sustitución de un alguna función de la variable "x"; con esto una diferencial determinada se transforma en otra que se integra fácilmente mediante una de las fórmulas de integración inmediata.

En ocasiones se sustituye la base, en otras el exponente; en otros casos se sustituye el denominador o el ángulo de una función trigonométrica. La sustitución o cambio de variable se hace según convenga.

Ejemplos: *(5)* $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

1.- $\int (\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{2})^2 \boldsymbol{3x^2 dx}$; apoyándonos en la fórmula 4 hacemos:

$u = x^3 + 2$ Derivado respecto x: $\frac{du}{dx} = 3x^2$; despejando dx; $du = 3x^2 dx$;entonces resuelto:

$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$; Restituyendo u por su valor original:

$$= \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$

2.- $\int \sqrt{\boldsymbol{1-3t}}\ \boldsymbol{dt}$; se puede escribir como: $\int (1-3t)^{1/2} dt$; apoyados en la fórmula 4, hacemos:

$u = 1 - 3t$; derivando: $\frac{du}{dt} = -3$; $dt = -\frac{du}{3}$; haciendo el cambio de variable:

$\int u^{1/2}\left(-\frac{du}{3}\right)$; Aplicando la fórmula 2

(2) ∫audx=a∫udx

$-\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{u^3}+C$ Restituyendo u por su valor original.

$$=-\frac{2}{9}\sqrt{(1-3t)^3}+C$$

3.- $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-5}}$

Nota: En el desarrollo de los siguientes ejercicios considérese que la variable *u* de las formulas es igual a la variable *v* empleada en el cambio de variable.

Podemos escribirla como

$\int (e^x-5)^{-\frac{1}{2}}e^x dx$

(5) $\int v^n dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C$

Apoyados en la fórmula 5

$v-e^x-5$; $\frac{dv}{dx}-e^x$; $dv-e^x dx$; (Cambio de Variable)

Sustituyendo estos valores en la integral

$\int v^{-\frac{1}{2}}dv$

Aplicando formula 5 y restituyendo a v su valor

$$=\frac{(e^x-5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{(e^x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=2\sqrt{e^x-5}+C$$

4.- $\int \frac{3dx}{2+3x}$

Apoyados en la fórmula 6

$v=2+3x$; $\frac{dv}{dx}=3$; $dv=3dx$ (Cambio de Variable)

(6) $\int \frac{dv}{v}=In|v|+C$

Sustituimos en la integral

$$= \int \frac{dv}{v}$$

Aplicando formula 6 y restituyendo a v su valor

$$= In|v| + C = In|2 + 3x| + C$$

5.- $\int \frac{tdt}{3t^2+4}$

(6) $\int \frac{du}{u} = In|u| + C$

Apoyándonos en la fórmula 5

$v = 3t^2 + 4\ ; \frac{dv}{dt} = 6t\ ; dv = 6tdt\ ; \frac{dv}{6} = tdt$ (Cambio de Variable)

Sustituyendo en la integral

(2) ∫audx=a∫udx

$$= \int \frac{\frac{dv}{6}}{v}$$

Aplicando la fórmula 2

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dv}{v}$$

Aplicando fórmula 5 y restituyendo a v su valor original

$$= \frac{1}{6} In|v| + C = \frac{1}{6} In|3t^2 + 4| + C$$

6.- $\int \frac{3dx}{e^x}$

Podemos escribirla como

$$= 3\int e^{-x}dx$$

Apoyados en la fórmula 8 tenemos

(8) $\int e^v dv = e^v + C$

$v = -x\ ; \frac{dv}{dx} = -1\ ; dv = -dx\ ; -dv = dx$

Sustituyendo en la integral

$$= 3\int e^{v}(-dv)$$

$$= -3\int e^{v}dv$$

Utilizando la fórmula 8

$$= -3e^{-x} + C$$

$$= -\frac{3}{e^{x}} + C$$

7.- $\int \boldsymbol{sen\left(\frac{2x}{3}\right)dx}$

(9) $\int sen\, v\, dv = -\cos v + C$

Apoyados en la fórmula 9

$v = \frac{2x}{3}\,;\, \frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}\,;\, dv = \frac{2}{3}dx\,;\, \frac{3}{2}dv = dx$

Sustituyendo en la integral

$$= \int sen\, v \bullet \frac{3}{2}dv$$

$$= \frac{3}{2}\int senvdv$$

Utilizando la fórmula 9 y restituyendo a v su valor

$$= \frac{3}{2}\left[-cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right] + C$$

$$= -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

8.- $\int \boldsymbol{cos(b + ax)dx}$

(10) $\int cosudu = senu + C$

Apoyados en la fórmula 10 tenemos

$v = b + ax\,;\, \frac{dv}{dx} = a\,;\, dv = adx\,;\, \frac{dv}{a} = dx$

Sustituyendo en la integral

$$= \int cos \bullet \frac{dv}{a}$$

Aplicando formula 9 y restituyendo a v su valor

$$= \frac{1}{a} sen(b + ax) + C$$

9.- $\boldsymbol{\int csc^2(a - bx)dx}$

(12) $\int csc^2 udu = -cotu + C$

Apoyados en la fórmula 12 tenemos

$v = a - bx\ ; \frac{dv}{dx} = -b\ ; dv = \ -bdx\ ; \frac{dv}{-b} = dx$

Sustituyendo en la integral

$$= \int csc^2 v \bullet \frac{dv}{-b}$$

$$= -\frac{1}{b} \int csc^2 vdv$$

Aplicando formula 12 y restituyendo a v su valor tenemos

$$= -\frac{1}{b} [-\cot(v)] + C$$

$$= \frac{1}{b} \cot(a - bx) + C$$

10.- $\boldsymbol{\int e^x \cot e^x dx}$

Podemos escribirla como

$$\int cot(e^x) e^x dx$$

(16) $\int \cot udu = In|sen\, u| + C$

Apoyados en la fórmula 16 tenemos

$v = e^x\ ; \frac{dv}{dx} = \ e^x\ ; dv = e^x dx$

Sustituyendo en la integral

$$= \int cotv \bullet dv$$

Aplicando formula 16 y restituyendo a v su valor

$$= In|senv| + C$$

$$= In|sene^{x}| + C$$

11.- $\int \boldsymbol{sec^2(2ax)dx}$

(11) $\int sec^2 udu = \tan u + C$

Apoyados en la fórmula 11 tenemos

$v = 2ax\ ;\ \frac{dv}{dx} = 2a\ ;\ dv = 2adx\ ;\ \frac{dv}{2a} = dx$

Sustituyendo en la integral tenemos

$$= \int sec^2 v \bullet \frac{dv}{2a}$$

$$= \frac{1}{2a}\int sec^2 vdv$$

Aplicando la fórmula 11 tenemos y restituyendo a v su valor

$$= \frac{1}{2a} tanv + C$$

$$= \frac{1}{2a}\tan(2ax) + C$$

Practica 2 .- Resuelve las siguientes integrales empleando el método de sustitución o cambio de variable.

1) $\int \frac{dx}{x+2}$	$\int \frac{e^x dx}{e^x + 5}$

2) $\int 5e^{5x}dx$	$\int cos^2 2x\, sen2x$
3) $\int a^{2x}dx$	$\int \sqrt{3x-2}\, dx$
4) $\int 2\cos 2x\, dx$	$\int x^2 e^{x^3} dx$
5) $\int (3x+4)^6\, dx$	$\int \frac{dx}{4^{2x}}$
6) $\int 2x(x^2+1)\, dx$	

7) $\sqrt[5]{x^3}dx$	
8) $\int e^{cos4x}\, sen\ 4x\ dx$	

Interpretación Geométrica de la Constante C de Integración

Como la ecuación $\boldsymbol{y} = \int(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$ tiene muchas soluciones diferentes por una constante, esto significa que cualquier par de integrales de f son traslaciones verticales una de la otra. Traslación es una propiedad geométrica que mantiene la forma, el tamaño y la orientación de las figuras o gráficas.

En estas circunstancias la constante $\boldsymbol{C}$ es un parámetro, es decir una cantidad distinta de la variable a la cual se le pueden fijar distintos valores numéricos.

Ejercicio.- Integra la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{2x\,dx}$; representando gráficamente la familia de funciones para valores de C = -4 , C = -1, C = 0 y C = 1 en el dominio [-4 , 4].

Solución: Integramos ambos miembros de la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{2x\,dx}$

$\int dy = \int 2x\, dx$

En el primer miembro se reducen la integral y la diferencial quedando solo y; en el segundo miembro aplicamos las formulas 2 y 4

(2) $\int audx = a \int udx$

(4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$y = \int 2x\, dx = 2\int x\, dx = 2\frac{x^2}{2} + C; y = x^2 + C$

Tabulación para obtener pares ordenados, haciendo $\boldsymbol{y} = \mathrm{f}(\boldsymbol{x})$

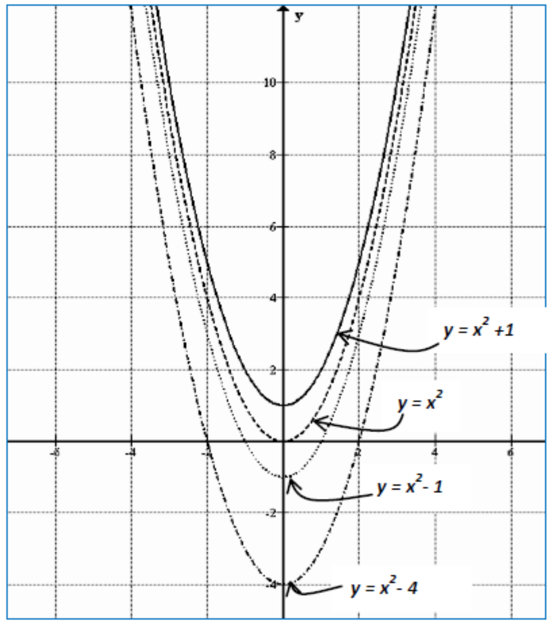
En el dominio $[-4\,,4]$ para valores de $C = -4\,, C = -1, C = 0\; y\; C = 1$

Para C =-4	
f(x)= x^2 - 4	
x	f(x)
-4	12
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5
4	12

Para C =-1	
f(x)= x^2- 1	
x	f(x)
-4	15
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8
4	15

Para C = 0	
f(x)= x^2	
x	f(x)
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Para C = 1	
f(x)= x^2+ 1	
x	f(x)
-4	17
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10
4	17



Las gráficas de las funciones resultantes son traslaciones verticales una de la otra y forman la familia de curvas ***y = x^2 + C***

Calculo de la constante C de integración

Conociendo la ecuación de una curva, $\boldsymbol{y} = \mathrm{f}\,(\boldsymbol{x})$, la pendiente $\boldsymbol{m}$ de la tangente a ella en uno de sus puntos $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, viene dada por $\boldsymbol{m} = \mathrm{f}\,'\,(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$; recíprocamente por integración se puede hallar la familia de curvas $\boldsymbol{y} = \mathrm{f}\,(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$; para determinar una de ellas en particular es necesario asignar o determinar el valor de la constante $\boldsymbol{C}$. esto se consigue obligando a que la curva pase por el punto dado.

Ejercicio.- dada la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{x5}\; \boldsymbol{dx}$; determina la integral, la constante $\boldsymbol{C}$ de integración y la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$.

Solución: $\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{x^5}\; \boldsymbol{dx}$

Integrando ambos miembros y aplicando la fórmula 4

$\boldsymbol{\int dy = \int x^5 dx}$ *(4)* $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\boldsymbol{y = \frac{x^6}{6} + C}$ *Función Primitiva: Ecuación de la Familia de Curvas*

Para calcular el valor de C*, sustituimos* $(-1, -1)$: $x = 1, y = 1$ *en la función primitiva.*

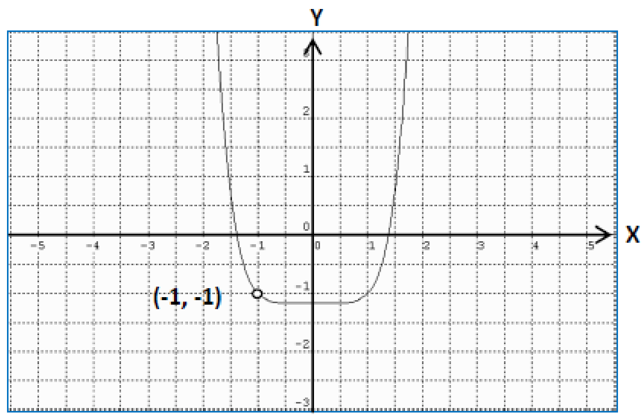
$(-1) = \frac{(-1)^6}{6} + C \quad ; \quad -1 = \frac{1}{6} + C \quad Despejando\ C$

$C = -1 - \frac{1}{6}$ $\quad$ $Como\colon\ -1 = -\frac{6}{6}$:

$C = -\frac{7}{6}$ $\quad$ *Sustituyendo este valor en la primitiva*

En consecuencia, la función cuya curva pasa por el punto (-1,-1) es:

$y = \frac{x^6}{6} - \frac{7}{6}$



Grafica de la función

Ejercicios (4).- Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Integra la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{dx}$ y grafica el dominio $[-3, 3]$; para valores de $C = -5, C = -2, C = 0\ y\ C = 3$.

2) Integra la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{dx}$ y grafica el dominio $[-2, 2]$; para valores de $C = -3, C = 0\ y\ C = 1$.

3) Dada la ecuación diferencial $\boldsymbol{dy} = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2})\,\boldsymbol{dx}$ determina la integral, la constante C de integración y la ecuación de la curva que pasa por el punto $(3, 10)$.